



MSC 35L82

## ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.К. Уринов, К.С. Халилов

Ферганский Государственный университет,

ул. Мураббийлар (19), Фергана, (150100), Узбекистан, e-mail: [urinovak@mail.ru](mailto:urinovak@mail.ru), [xalilov\\_q@mail.ru](mailto:xalilov_q@mail.ru)

**Ключевые слова:** параболо-гиперболическое уравнение, интегральное условие, дробное дифференцирование.

В конечной односвязной области  $D$  плоскости  $xOy$ , ограниченной прямыми  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $x = 1$ ,  $x - y = 1$ ,  $x + y = 0$  рассмотрим дифференциальное уравнение  $Lu = 0$  параболо-гиперболического типа, где

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y - \lambda^2 u, & (x, y) \in D_1 = D \cap (y > 0), \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} - (2\beta/y) u_y, & (x, y) \in D_2 = D \cap (y < 0), \end{cases}$$

а  $\beta, \lambda \in R$ , причем  $0 < \beta < (1/2)$ .

В настоящей работе исследуется однозначная разрешимость следующей задачи.

**Задача  $H_1$ .** Требуется найти функцию  $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C_{x,y}^{(2,1)}(D_1) \cap C^2(D_2)$  удовлетворяющую уравнению  $Lu = 0$  в области  $D_1 \cup D_2$  и следующим условиям:

$$u(0, y) = \mu_1(y), \quad \int_0^1 u(x, y) dx = \int_0^1 u(1, t) dt + \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (1)$$

$$a(x) D_{0x}^{1-\beta} u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + b(x) D_{x1}^{1-\beta} u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) + \\ + c(x) \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y) = e(x), \quad 0 < x < 1; \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

где  $\mu_1(y)$ ,  $\mu_2(y)$ ,  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$ ,  $e(x)$  - заданные непрерывные функции,

$$D_{0x}^{1-\beta} q(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} q(t) dt, \quad D_{x1}^{1-\beta} q(x) = \frac{-1}{\Gamma(\beta)} \frac{d}{dx} \int_x^1 (t-x)^{\beta-1} q(t) dt,$$

операторы дробного дифференцирования [1],  $\Gamma(z)$ -гамма-функция Эйлера.

Приведем схему исследования поставленной задачи  $H_1$ . Пусть  $u(x, y)$  - решение задачи  $H_1$ . Учитывая условие (3) и  $u(x, y) \in C(\bar{D})$ , примем обозначения  $u(x, +0) = u(x, -0) = \tau(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ;  $\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y) = \nu(x)$ ,  $0 < x < 1$  и предположим, что  $\tau(x) \in C[0, 1] \cap C^{(2,\delta)}(0, 1)$ ,  $\nu(x) \in C^2(0, 1)$ ,  $[x(1-x)]^{2\beta} \nu(x) \in C[0, 1]$ ,



$\delta > 0$ . Тогда, функция  $u(x, y)$  в области  $D_2$ , как решение видоизменённой задачи Коши для уравнения  $L_2 u = 0$ , представима в виде [1]

$$u(x, y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau(z) [t(1-t)]^{\beta-1} dt - \gamma_2 (-y)^{1-2\beta} \int_0^1 \nu(z) [t(1-t)]^{-\beta} dt, \quad (4)$$

где  $z = x + y(1-2t)$ ,  $\gamma_1 = \Gamma(2\beta) / \Gamma^2(\beta)$ ,  $\gamma_2 = \Gamma(1-2\beta) / \Gamma^2(1-\beta)$ .

Пользуясь формулой (4) и условием (2), как и в работе [1], находим

$$A(x) \nu(x) = \gamma a(x) (1-x)^\beta D_{0x}^{1-2\beta} \tau(x) + \gamma b(x) x^\beta D_{x1}^{1-2\beta} \tau(x) - g(x), \quad 0 < x < 1. \quad (5)$$

Здесь

$$\gamma = 2^{2\beta} \Gamma(\beta + 1/2) \Gamma(-\beta + 1/2), \quad g(x) = [2^{1-2\beta} \Gamma(1-\beta) / \Gamma(1-2\beta)] [x(1-x)]^\beta e(x),$$

$$A(x) = (1-x)^\beta a(x) + x^\beta b(x) - 2 \left[ (1-2\beta)^{2\beta} \Gamma(\beta) \Gamma(-\beta + 1/2) \right]^{-1} [x(1-x)]^\beta c(x).$$

Из уравнения  $L_1 u = 0$  и краевых условий (1), (2) при  $y \rightarrow +0$  получим

$$\tau''(x) - \lambda^2 \tau(x) = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

$$\tau(0) = \mu_1(0), \quad \int_0^1 \tau(x) dx = \mu_2(0). \quad (7)$$

Следовательно, функции  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$  удовлетворяют уравнениям (5), (6) и условиям (7). Доказано, что справедлива

**Теорема 1.** Пусть выполнены следующие условия:

$$a^2(x) + b^2(x) \neq 0, \quad a(x)b(x) \geq 0, \quad a(x)c(x) \leq 0, \quad b(x)c(x) \leq 0 \quad x \in [0, 1], \quad (8)$$

$$a(x), b(x), c(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1), \quad e(x) \in C^2(0, 1), \quad [x(1-x)]^{3\beta} e(x) \in C[0, 1]. \quad (9)$$

Тогда задача  $\{(5), (6), (7)\}$  имеет единственное решение.

Единственность решения задачи  $\{(5), (6), (7)\}$  доказывается с использованием принципа экстремума для операторов  $D_{0x}^{1-2\beta}$  и  $D_{x1}^{1-2\beta}$  [1], а существование решения эквивалентным сведением рассматриваемой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которой следует из единственности решения задачи.

После того, как найдены функции  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$  из задачи  $\{(5), (6), (7)\}$ , решение задачи  $H_1$  в области  $D_2$  находится с помощью формулы (4), а в области  $D_1$  определяется как решение задачи об определении функции  $u(x, y) \in C(\bar{D}_1) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_1)$ , удовлетворяющей уравнению  $L_1 u = 0$  и условия (1), (2),  $u(x, 0) = \tau(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Последняя задача исследуется, как и в работе [2].

Справедлива следующая основная

**Теорема 2.** Пусть  $h_1(y), h_2(y) \in C[0, 1]$  и выполнены условия (8), (9). Тогда решение задачи  $H_1$  существует и оно единственно.

**Замечание.** Этим же методом можно исследовать задачу  $H_1$  и в том случае, когда второе из условий (1) заменено условием  $u(1, y) = \int_0^1 u(x, y) dx + \mu_2(y)$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .



### Литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа / Москва: Наука, 1985. – 304 с.
2. Голованчиков А.Б., Симонова И.Э., Симонов Б.В. Решение диффузионной задачи с интегральным граничным условием // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – 6, №2. – С.339-349.

## PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR PARABOLIC AND HYPERBOLIC EQUATION

**A.K. Urinov, K.S. Khalilov**

Fergana State University,

Murabbiylar (19), Fergana, (150100), Uzbekistan, e-mail: [urinovak@mail.ru](mailto:urinovak@mail.ru), [xalilov\\_q@mail.ru](mailto:xalilov_q@mail.ru)

**Key words:** parabolic-hyperbolic equation, integral condition, fractional differentiation.